ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ:

Αν οι οικογένειες $A_i, i\in I$ και $B_j, j\in J$ είναι διαμερίσεις των συνόλων A και B αντίστοιχα να αποδείξετε ότι η οικογένεια $(A_i\times B_j), (i,j)\in I\times J$ είναι διαμέριση του συνόλου $A\times B$.

ΛΥΣΗ

$$A_i \text{ διαμέριση του } A \Leftrightarrow \begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = A \\ (\forall i\in I): A_i\neq\emptyset \\ (\forall i,j\in I)\ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset \end{cases}$$

$$B_i \text{ διαμέριση του } B \Leftrightarrow \begin{cases} \bigcup_{j\in J} B_j = B \\ (\forall j\in J): B_j\neq\emptyset \\ (\forall i,j\in J)\ i\neq j \Rightarrow B_i\cap B_j=\emptyset \end{cases}$$

$A_i\times B_j$ διαμέριση του $A\times B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\times B_j = A\times B \quad ① \\ (\forall (i,j)\in I\times J): A_i\times B_j\neq\emptyset \quad ② \\ (\forall (i,j),(k,\lambda)\in I\times J): (i,j)\neq(k,\lambda)\Rightarrow \\ \Rightarrow (A_i\times B_j)\cap(A_k\times B_\lambda)=\emptyset \quad ③ \end{cases}$$

Για την ①:

$(\forall i \in I)\ A_i \neq \phi \ \wedge (\forall j \in J): B_j \neq \phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall (i,j) \in I \times J): A_i \cap B_j \neq \phi$

Για την ②:

$(\Rightarrow): [(\forall i \in I)\ A_i \subseteq A] \wedge [(\forall j \in J): B_j \subseteq B] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\forall (i,j) \in I \times J): A_i \times B_j \subseteq A \times B] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j \subseteq A \times B$

$(\Leftarrow)$: ΘΔΟ $A \times B \subseteq \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$.

Έστω αυχον $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \xRightarrow{A,B \text{ διαμ.}}$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \ \wedge y \in \bigcup_{j \in J} B_j \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\exists i_0 \in I): x \in A_{i_0}] \wedge [(\exists j_0 \in J): x \in B_{j_0}] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\exists (i_0, j_0) \in I \times J]: x \in A_{i_0} \times B_{i_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$

Για την ③:

$(i,j) \neq (k,\lambda) \Rightarrow i \neq k \vee j \neq \lambda$ οποτε

$i \neq k \vee j \neq \lambda \Rightarrow A_i \cap A_k = \phi \vee B_j \cap B_\lambda = \phi \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_i \cap A_k) \times (B_j \cap B_\lambda) = (A_i \times B_i) \cap (A_k \times B_\lambda) = \phi$

Άρα, η Οικογένεια $A_i \times B_j$, $(i,j) \in I \times J$ αποτελεί μια διαμέριση του $A \times B$.